第 48 講　整数の性質(2)

【基礎確認事項】

［1］ ユークリッドの互除法

□2 つの自然数 a，b について，a を b で割ったときの商を q，余りを r とすると，一般的に次のことが成り立つ．

> **互除法の原理**
> a と b の最大公約数は，b と r の最大公約数に等しい

□この原理を利用し，2 つの自然数 a，b の最大公約数を求める方法を**ユークリッドの互除法**という．最大公約数を求める方法として有効である．

例　408 と 119 の最大公約数を求める

408 を 119 で割ったときの商は 3　余りは 51

よって　408 と 119 の最大公約数は，119 と 51 の最大公約数に等しい

119 を 51 で割ったときの商は 2　余りは 17

よって　119 と 51 の最大公約数は，51 と 17 の最大公約数に等しい

51 を 17 で割ったときの商は 3　余りは 0．すなわち 51 は 17 で割り切れる．

よって　51 と 17 の最大公約数は,17 と 0 の最大公約数,すなわち 17 に等しい．

したがって，408 と 119 の最大公約数は　17

⇒　C&U ①

［2］ n 進法

□整数の表現として，通常は 0 から 9 までの 10 種類の数字を並べることによって表現する．例えば「512」という数字は「100 の位」の数字が 5，「10 の位」の数字が 1，「1 の位」の数字が 2 であるが，隣り合う 2 つの位において高い位が低い位の 10 倍になっている．このように位取りの基礎（底）が 10 である数の表現方法を **10 進法**という．

□$n \geqq 2$ のとき，位取りの底が n である数の表現方法を **n 進法**といい，0 から $n-1$ までの数字を並べることで表現される．n 進法では，その数の右下に $_{(n)}$ と書く．10 進法では通常 $_{(10)}$ を省略する．n 進法で表された数を **n 進数**という．

例　2 進数 $1001_{(2)}$ について

位	2^3	2^2	2^1	$2^0(=1)$
数字	1	0	0	1

よって，$1001_{(2)}$ を 10 進法で表すと

$1\cdot2^3+0\cdot2^2+0\cdot2^1+1\cdot2^0=8+1=9$　である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

□ n 進法の小数については，小数第1位は $\dfrac{1}{n^1}$ の位，小数第2位は $\dfrac{1}{n^2}$ の位，となり，小数第 m 位の位は $\dfrac{1}{n^m}$ である．

⇒ C&U 2

［3］ 分数と小数

□整数にならない分数 $\dfrac{m}{n}$ は，小数で表現すると有限小数（小数第何位かで終わる小数）または循環小数（同じ数字または同じ数字の列が繰り返される無限小数）となる．

有限小数となるものは分母 n の素因数が2または5であり，それ以外の素因数を含むものは循環小数となることが知られている．

□分数 $\dfrac{m}{n}$ は，位取りの基礎（底）によって，有限小数となったり循環小数となったりする．

例　$\dfrac{2}{3}$ は10進法においては　$0.666\cdots=0.\dot{6}$（循環小数）

3進法においては　$\dfrac{1}{3^1}$ の位（小数第1位）の数字が2より　$0.2_{(3)}$（有限小数）

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

【CHECK & UP】

1　次の2つの整数の最大公約数を，互除法を用いて求めよ.

(1)　72，15　　(2)　689，481

2　(1)　2進数　$101110_{(2)}$，5進数　$2403_{(5)}$ をそれぞれ10進法で表せ.

(2)　10進法73を3進法で表せ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 48 講　整数の性質(2)

1　次の等式を満たす整数 x, y の組をすべて求めよ.

(1)　$4x-7y=1$

(2)　$24x+19y=1$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 [1]　$4x+2y+z=15$　を満たす自然数 x, y, z の組を求めよ.

[2] (1)　$6x^2+xy-2y^2-5x+6y-4$ を因数分解せよ.

(2)　$6x^2+xy-2y^2-5x+6y-20=0$ を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 (1)　2進法で表すと10桁になるような自然数Nは何個あるか求めよ.

(2)　自然数Nを5進法で表すと3桁の数 abc となり，7進法で表すと3桁の数 cab となる．a，b，c を求めよ．また，Nを10進法で表せ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 48 講　整数の性質(2)

$37x-90y=4$　……①　を満たす整数解を求めたい．

$90=37\times2+$ [アイ]　より　[アイ] $=90-37\times2$　……②

$37=$ [アイ] $\times2+$ [ウ]　より

[ウ] $=37-$ [アイ] $\times2=37-(90-37\times2)\times2=5\times37-2\times90$　……③

[アイ] $=$ [ウ] $\times3+1$　より　$1=$ [アイ] $-$ [ウ] $\times3$　これに②，③の結果を反映させることにより

$37\times(-$ [エオ] $)-90\times(-$ [オ] $)=1$　　これを両辺 4 倍して①と差を取ることにより

①は　$37(x+$ [カキ] $)=90(y+$ [クケ] $)$　と変形できる．

37 と 90 は互いに素であることより，整数 k を用いて

　$x+$ [カキ] $=90k$　つまり　$x=-$ [カキ] $+90k$　と表せる．

したがって求める①の整数解は $x=-$ [カキ] $+90k$，$y=-$ [クケ] $+37k$（k；整数）と表せる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 48 講　整数の性質(2)

【CHECK & UP】

1 (1)　$72=15\cdot 4+12$

よって　72 と 15 の最大公約数は，15 と 12 の最大公約数に等しい

$15=12\cdot 1+3$

よって　15 と 12 の最大公約数は，12 と 3 の最大公約数に等しい

$12=3\cdot 4+0$

よって　72 と 15 の最大公約数は **3**

(2)　$689=481\cdot 1+208$

$481=208\cdot 2+65$

$208=65\cdot 3+13$

$65=13\cdot 5+0$　　よって　689 と 481 の最大公約数は **13**

「互除法の原理」を利用して最大公約数を出す方法．
　最初は 2 数のうち大きい方を割られる数，小さい方の数を割る数として割り算を行う．次に，出てきた余りで小さい方の数を割る．
　これを繰り返し，割り切れたらそのときの割った数（余り）が求める最大公約数である．

2 (1)　$101110_{(2)}=1\cdot 2^5+0\cdot 2^4+1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+1\cdot 2^1+0\cdot 2^0$

$=32+0+8+4+2+0=\mathbf{46}$

$2403_{(5)}=2\cdot 5^3+4\cdot 5^2+0\cdot 5^1+3\cdot 5^0=250+100+0+3=\mathbf{353}$

(2)　右の計算により　$\mathbf{2201_{(3)}}$

余り
3) 73
3) 24 … 1
3) 8 … 0
　　2 … 2

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 48 講　整数の性質(2)

1　次の等式を満たす整数 x，y の組をすべて求めよ．

(1)　$4x-7y=1$

(2)　$24x+19y=1$

(1)　$4x-7y=1$　……①　の整数解の１つは　$x=2$，$y=1$

よって　$4\cdot2-7\cdot1=1$　……②

①－②より　$4(x-2)-7(y-1)=0$　つまり　$4(x-2)=7(y-1)$

4，7 は互いに素より，$x-2$ は 7 の倍数

よって　$x-2=7k$（k は整数）と表せる．

このとき　③より　$4\cdot7k=7(y-1)$　つまり　$y-1=4k$

したがって①の解は　$\boldsymbol{x=7k+2}$，$\boldsymbol{y=4k+1}$　**（$\boldsymbol{k}$ は整数）**

(2)　$24=19\cdot1+5$　より　$5=24-19\cdot1$

$19=5\cdot3+4$　より　$4=19-5\cdot3$

$5=4\cdot1+1$　より　$1=5-4\cdot1$

よって　$1=5-4\cdot1$

$=5-(19-5\cdot3)\cdot1$

$=5\cdot4+19\cdot(-1)$

$=(24-19\cdot1)\cdot4+19\cdot(-1)$

$=24\cdot4+19\cdot(-5)$

したがって　$24x+19y=1$　……①の整数解の１つは　$x=4$，$y=-5$　である．

このことより①は　$24(x-4)+19(y+5)=0$

つまり　$24(x-4)=-19(y+5)$　……②

24，19 は互いに素より　$x-4$ は 19 の倍数

よって　$x-4=19k$　（k は整数）

このとき　②より　$24\cdot19k=-19(y+5)$　つまり　$y+5=-24k$

したがって①の解は　$\boldsymbol{x=19k+4}$，$\boldsymbol{y=-24k-5}$　**（$\boldsymbol{k}$ は整数）**

2　[1]　$4x+2y+z=15$　を満たす自然数 x，y，z の組を求めよ．

$4x+2y+z=15$　より　$2y+z=15-4x$

$y\geqq1$，$z\geqq1$ より　$2y+z\geqq3$　　つまり　$15-4x\geqq3$　　よって　$x\leqq3$

よって $x=1$，2，3 に限られる．

$x=1$ のとき　$2y+z=11$

$z\geqq1$ より $11-2y\geqq1$　　$y\leqq5$　　よって　$y=1$，2，3，4，5

このときそれぞれ　$z=9$，7，5，3，1

$x=2$ のとき　$2y+z=7$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$z=7-2y\geqq 1$　より　$y\leqq 3$　　よって　$y=1,\ 2,\ 3$

このときそれぞれ　$z=5,\ 3,\ 1$

$x=3$ のとき　$2y+z=3$

$z=3-2y\geqq 1$　　より　$y=1$　このとき　$z=1$

以上より　$(x,\ y,\ z)=\mathbf{(1,\ 1,\ 9),\ (1,\ 2,\ 7),\ (1,\ 3,\ 5),\ (1,\ 4,\ 3),\ (1,\ 5,\ 1)}$

$\mathbf{(2,\ 1,\ 5),\ (2,\ 2,\ 3),\ (2,\ 3,\ 1),\ (3,\ 1,\ 1)}$

2 ［2］（1）　$6x^2+xy-2y^2-5x+6y-4$ を因数分解せよ．

（2）　$6x^2+xy-2y^2-5x+6y-20=0$ を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

（1）　$6x^2+xy-2y^2-5x+6y-4$

$=6x^2+(y-5)x-2(y-1)(y-2)$

$=\mathbf{(3x+2y-4)(2x-y+1)}$

（2）　$6x^2+xy-2y^2-5x+6y-20=0$　より

$(3x+2y-4)(2x-y+1)=16$

$x,\ y$ は自然数より，$3x+2y-4\geqq 1$．よって　$2x-y+1\geqq 1$

したがって　$(3x+2y-4,\ 2x-y+1)=(1,\ 16),\ (2,\ 8),\ (4,\ 4),\ (8,\ 2),\ (16,\ 1)$

このうち，$x,\ y$ が自然数となるのは

$(3x+2y-4,\ 2x-y+1)=(4,\ 4),\ (8,\ 2)$ のときで，

$(x,\ y)=\mathbf{(2,\ 1),\ (2,\ 3)}$

3 （1）　2 進法で表すと 10 桁になるような自然数 N は何個あるか求めよ．

（2）　自然数 N を 5 進法で表すと 3 桁の数 abc となり，7 進法で表すと 3 桁の数 cab となる．$a,\ b,\ c$ を求めよ．また，N を 10 進法で表せ．

（1）　題意より

$2^9\leqq N<2^{10}$

これを満たす自然数 N の個数は　$(2^{10}-1)-2^9+1=2^9(2-1)=2^9=\mathbf{512}$ **（個）**

（2）　abc は 3 桁の 5 進数より　$1\leqq a\leqq 4,\ 0\leqq b\leqq 4,\ 0\leqq c\leqq 4$

cab は 3 桁の 7 進数より　$1\leqq c\leqq 6,\ 0\leqq b\leqq 6,\ 0\leqq a\leqq 6$

よって　$1\leqq a\leqq 4,\ 0\leqq b\leqq 4,\ 1\leqq c\leqq 4$

$N=abc_{(5)}=a\cdot 5^2+b\cdot 5^1+c\cdot 5^0=25a+5b+c$

$N=cab_{(7)}=c\cdot 7^2+a\cdot 7^1+b\cdot 7^0=49c+7a+b$

よって　$25a+5b+c=49c+7a+b$　つまり　$9a+2b=24c$　……①

ここで，①より　$24c=9a+2b\leqq 9\cdot 4+2\cdot 4=44$　より　$c\leqq \dfrac{11}{6}$　よって　$c=1$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

このとき　①より　$9a+2b=24$　すなわち　$2b=3(8-3a)$　……②

2と3は互いに素より，bは3の倍数である．よって　$b=0, 3$

$b=0$のとき　②を満たす整数aはない

$b=3$のとき　②より　$a=2$　これは適する．

以上より　$a=\mathbf{2}$，$b=\mathbf{3}$，$c=\mathbf{1}$

したがって　$N=25\cdot 2+5\cdot 3+1=\mathbf{66}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 48 講　整数の性質(2)

$37x-90y=4$　……①　を満たす整数解を求めたい．

$90=37\times2+$ **アイ**　より　**アイ** $=90-37\times2$　……②

$37=$ **アイ** $\times2+$ **ウ**　より

ウ $=37-$ **アイ** $\times2=37-(90-37\times2)\times2=5\times37-2\times90$　……③

アイ $=$ **ウ** $\times3+1$　より　$1=$ **アイ** $-$ **ウ** $\times3$　これに②，③の結果を反映させることにより

$37\times(-$ **エオ** $)-90\times(-$ **オ** $)=1$　　これを両辺 4 倍して①と差を取ることにより

①は　$37(x+$ **カキ** $)=90(y+$ **クケ** $)$　と変形できる．

37 と 90 は互いに素であることより，整数 k を用いて

　$x+$ **カキ** $=90k$　つまり　$x=-$ **カキ** $+90k$　と表せる．

したがって求める①の整数解は $x=-$ **カキ** $+90k$，$y=-$ **クケ** $+37k$（k；整数）と表せる．

$37x-90y=4$　……①

$90=37\times2+\mathbf{16}$　より　$16=90-37\times2$　……②

$37=16\times2+\mathbf{5}$　より　$5=37-16\times2=37-(90-37\times2)\times2=5\times37-2\times90$　……③

$16=5\times3+1$　より　$1=16-5\times3=(90-37\times2)-(5\times37-2\times90)\times3$

$=37\times(-17)-90\times(-7)$

つまり　$37\times(-\mathbf{17})-90\times(-\mathbf{7})=1$

これを両辺 4 倍して　$37\times(-68)-90\times(-28)=4$　……④

①－④より　$37(x+\mathbf{68})-90(y+\mathbf{28})=0$

　すなわち　①は　$37(x+68)=90(y+28)$　と変形できる．

37 と 90 は互いに素であることより，整数 k を用いて

　$x+68=90k$　つまり　$x=-68+90k$　と表せる．

　このとき　$37\times90k=90(y+28)$　より

　　$y+28=37k$　　つまり　$y=-28+37k$　と表せる．

したがって求める①の整数解は

　　$x=-68+90k$，$y=-28+37k$（k；整数）と表せる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。